

บทที่

2

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง

- 2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกและผลต่างของกำลังสาม
- 2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสาม



จุดประสงค์ของบทเรียน

เมื่อเรียนจบบทนี้แล้ว นักเรียนจะสามารถ

1. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสามและผลต่างของกำลังสามโดยใช้สูตร
2. แยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสามที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสองกำลังสองสมบูรณ์ ผลบวกของกำลังสาม หรือผลต่างของกำลังสาม โดยใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ หรือสมบัติการแจกแจง





บทที่ 2

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง



“

ในการออกแบบแคปซูลน้ำมันปลา อาจออกแบบให้มีลักษณะคล้ายทรงกระบอกโดยมีครึ่งทรงกลมปิดปลายทั้งสองข้าง และให้ความสูงของทรงกระบอกสัมพันธ์กับรัศมีของทรงกระบอก เช่น ให้ความสูงของทรงกระบอกเป็นสี่เท่าของรัศมีของทรงกระบอก ทั้งนี้หากต้องการให้ปริมาณของน้ำมันปลาในแต่ละแคปซูลมีค่าค่าหนึ่ง ผู้ออกแบบจะต้องคำนวณหารัศมีของทรงกระบอกของแคปซูล ซึ่งอาจหาได้โดยใช้พหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง เช่น $8x^3 - 125$ โดย x แทนรัศมีของทรงกระบอก แล้วหาค่า x ด้วยการแยกตัวประกอบของพหุนาม

”



ทบทวนความรู้ก่อนเรียน

- ❖ สมบัติของเลขยกกำลัง

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ } m \text{ และ } n \text{ เป็นเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนเต็ม}$$

เช่น $(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$
 $2^{10} = 2^{5 \times 2} = (2^5)^2$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{เมื่อ } a, b \text{ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ } n \text{ เป็นเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนเต็ม}$$

เช่น $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 1,000$

- ❖ พหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูป $x^2 + bx + c$ แยกตัวประกอบเป็น $(x + m)(x + n)$ ได้ เมื่อ $mn = c$ และ $m + n = b$ โดยที่ b, c, m และ n เป็นจำนวนเต็ม

เช่น $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

- ❖ พหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ แยกตัวประกอบเป็น $(px + r)(qx + s)$ ได้ เมื่อ $pq = a$, $rs = c$ และ $ps + qr = b$ โดยที่ a, b, c, p, q, r, s เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$

เช่น $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

- ❖ ถ้า A และ B เป็นพหุนาม จะแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

- ❖ ถ้า A และ B เป็นพหุนาม จะแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

นักเรียนสามารถทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนได้ที่ <http://ipst.me/10692>

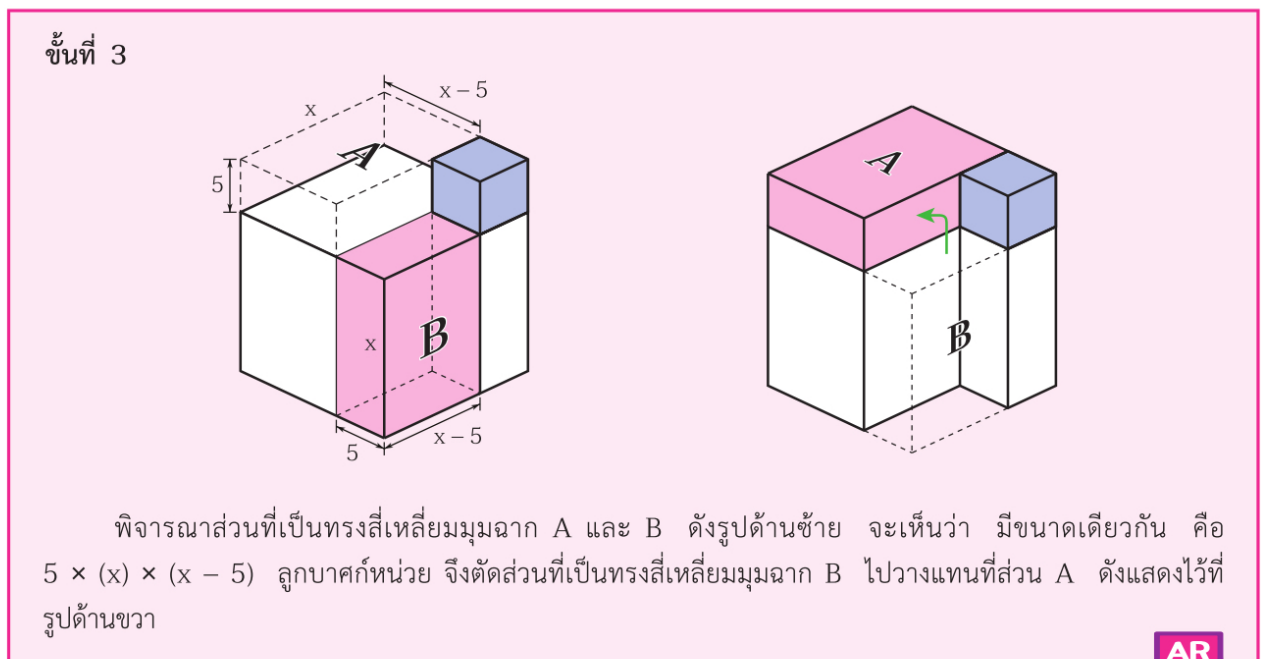
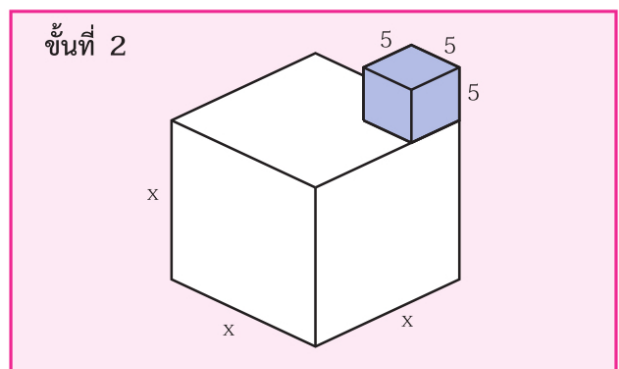
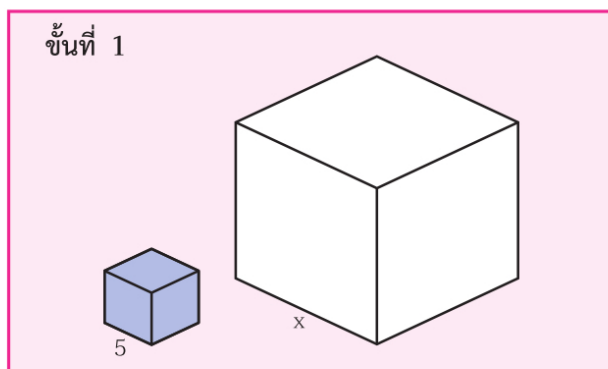


นักเรียนเคยทราบมาแล้วเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$ ให้ได้เป็นตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม **ในบทนี้** จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม ให้ได้เป็นตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ทักษะในการแยกตัวประกอบของพหุนามนี้ จะเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้น สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้มากขึ้น

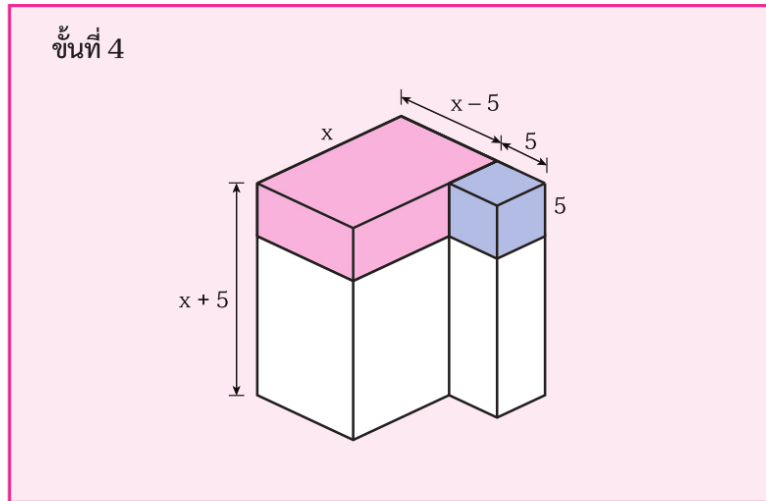
2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกและผลต่างของกำลังสาม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกและผลต่างของกำลังสาม

ให้นักเรียนพิจารณาการหาผลรวมของปริมาตรของลูกบาศก์ที่มีปริมาตร 5^3 ลูกบาศก์หน่วย และ x^3 ลูกบาศก์หน่วย ดังต่อไปนี้



จากขั้นที่ 3 จะได้ปริซึม ดังรูป



จากรูปข้างต้น จะเห็นว่า ปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติในขั้นที่ 2 เท่ากับปริมาตรของปริซึมในขั้นที่ 4 ดังนั้น

$$\begin{aligned}x^3 + 5^3 &= x(x-5)(x+5) + (5)(5)(x+5) \\ &= (x+5)[x(x-5) + 25] \\ &= (x+5)(x^2 - 5x + 25)\end{aligned}$$

จากการหาปริมาตรข้างต้น จะเห็นว่า เราสามารถเขียนพหุนาม $x^3 + 5^3$ ซึ่งเป็นพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม (sum of cubes) ให้อยู่ในรูปของการคูณกันของพหุนามได้

เมื่อพิจารณาการหาผลคูณของพหุนาม $x+5$ และ $x^2 - 5x + 25$ จะได้

$$\begin{aligned}(x+5)(x^2 - 5x + 25) &= x^3 - 5x^2 + 25x + 5x^2 - 25x + 125 \\ &= x^3 + 125 \\ &= x^3 + 5^3\end{aligned}$$

นั่นคือ เราสามารถแยกตัวประกอบของ $x^3 + 5^3$ ได้เป็น $(x+5)(x^2 - 5x + 25)$

และเมื่อพิจารณาการหาผลคูณของพหุนาม $2x+3$ และ $4x^2 - 6x + 9$ จะได้

$$\begin{aligned}(2x+3)(4x^2 - 6x + 9) &= 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 \\ &= 8x^3 + 27 \\ &= (2x)^3 + 3^3\end{aligned}$$

นั่นคือ เราสามารถแยกตัวประกอบของ $(2x)^3 + 3^3$ ได้เป็น $(2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$



พิจารณา $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

หรือ $x^3 + 5^3 = (x + 5)[x^2 - (x)(5) + 5^2]$

และพิจารณา $(2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

หรือ $(2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + 3^2]$

จะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามข้างต้นมีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ดังนี้

$$(\text{พจน์หน้า})^3 + (\text{พจน์หลัง})^3 = (\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง}) [(\text{พจน์หน้า})^2 - (\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2]$$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม เรียกพหุนามที่อยู่ในรูป $A^3 + B^3$ ว่าผลบวกของกำลังสาม การแยกตัวประกอบของพหุนามทำได้ตามสูตรดังนี้

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 1$

วิธีทำ $x^3 + 1 = x^3 + 1^3$
 $= (x + 1)[x^2 - (x)(1) + 1^2]$
 $= (x + 1)(x^2 - x + 1)$

ดังนั้น $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 343$

วิธีทำ $x^3 + 343 = x^3 + 7^3$
 $= (x + 7)[x^2 - (x)(7) + 7^2]$
 $= (x + 7)(x^2 - 7x + 49)$

ดังนั้น $x^3 + 343 = (x + 7)(x^2 - 7x + 49)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $27x^3 + 64$

วิธีทำ $27x^3 + 64 = (3x)^3 + 4^3$
 $= (3x + 4)[(3x)^2 - (3x)(4) + 4^2]$
 $= (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$

ดังนั้น $27x^3 + 64 = (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $(2x + 1)^3 + (x - 3)^3$

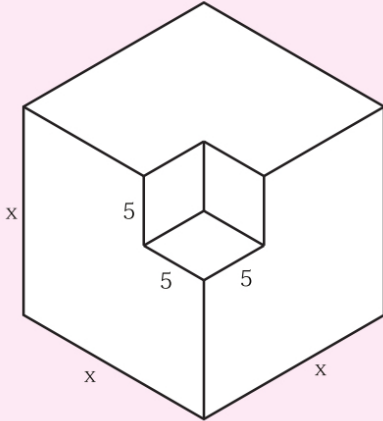
วิธีทำ $(2x + 1)^3 + (x - 3)^3 = [(2x + 1) + (x - 3)][(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x - 3) + (x - 3)^2]$
 $= (2x + 1 + x - 3)[(4x^2 + 4x + 1) - (2x^2 - 6x + x - 3) + (x^2 - 6x + 9)]$
 $= (3x - 2)(4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 6x + 3 + x^2 - 6x + 9)$
 $= (3x - 2)(3x^2 + 3x + 13)$

ดังนั้น $(2x + 1)^3 + (x - 3)^3 = (3x - 2)(3x^2 + 3x + 13)$

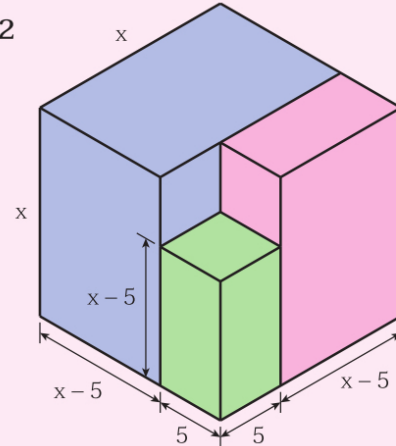


ให้นักเรียนพิจารณาการหาปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติที่สร้างจากลูกบาศก์ที่มีด้านยาว x หน่วย และมีการตัดที่มุมของลูกบาศก์นี้ให้เป็นลูกบาศก์ที่มีด้านยาว 5 หน่วย ออกไป ดังต่อไปนี้

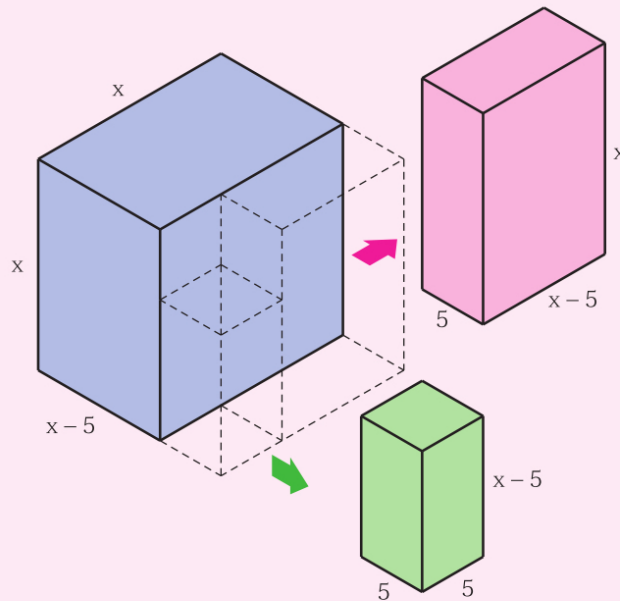
ขั้นที่ 1



ขั้นที่ 2



ขั้นที่ 3



จากรูปข้างต้น จะเห็นว่า ปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติในขั้นที่ 1 เท่ากับผลรวมของปริมาตรของปริซึมทั้งสามในขั้นที่ 3

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad x^3 - 5^3 &= (x-5)(x)(x) + 5(x-5)(x) + (5)(5)(x-5) \\ &= (x-5)(x^2 + 5x + 25) \end{aligned}$$

จากการหาปริมาตรข้างต้น จะเห็นว่า เราสามารถเขียนพหุนาม $x^3 - 5^3$ ซึ่งเป็นพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสาม (difference of cubes) ให้อยู่ในรูปของการคูณกันของพหุนามได้

เมื่อพิจารณาการหาผลคูณของพหุนาม $x - 5$ และ $x^2 + 5x + 25$ จะได้

$$\begin{aligned}(x - 5)(x^2 + 5x + 25) &= x^3 + 5x^2 + 25x - 5x^2 - 25x - 125 \\ &= x^3 - 125 \\ &= x^3 - 5^3\end{aligned}$$

นั่นคือ เราสามารถแยกตัวประกอบของ $x^3 - 5^3$ ได้เป็น $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

และเมื่อพิจารณาการหาผลคูณของพหุนาม $2x - 3$ และ $4x^2 + 6x + 9$ จะได้

$$\begin{aligned}(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) &= 8x^3 + 12x^2 + 18x - 12x^2 - 18x - 27 \\ &= 8x^3 - 27 \\ &= (2x)^3 - 3^3\end{aligned}$$

นั่นคือ เราสามารถแยกตัวประกอบของ $(2x)^3 - 3^3$ ได้เป็น $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

พิจารณา $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

หรือ $x^3 - 5^3 = (x - 5)[x^2 + (x)(5) + 5^2]$

และพิจารณา $(2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

หรือ $(2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)[(2x)^2 + (2x)(3) + 3^2]$

จะเห็นว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามข้างต้นมีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ดังนี้

พจน์หน้าคือ x พจน์หลังคือ 5

พจน์หน้าคือ $2x$ พจน์หลังคือ 3

$$(\text{พจน์หน้า})^3 - (\text{พจน์หลัง})^3 = (\text{พจน์หน้า} - \text{พจน์หลัง}) [(\text{พจน์หน้า})^2 + (\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2]$$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม เรียกพหุนามที่อยู่ในรูป $A^3 - B^3$ ว่าผลต่างของกำลังสาม การแยกตัวประกอบของพหุนามทำได้ตามสูตรดังนี้

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $1,000 - x^3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}1,000 - x^3 &= 10^3 - x^3 \\ &= (10 - x)[10^2 + (10)(x) + x^2] \\ &= (10 - x)(100 + 10x + x^2)\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$1,000 - x^3 = (10 - x)(100 + 10x + x^2)$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 - 27y^3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 8x^3 - 27y^3 &= (2x)^3 - (3y)^3 \\ &= (2x - 3y)[(2x)^2 + (2x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 3)^3 - (3x + 2)^3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} (x - 3)^3 - (3x + 2)^3 &= [(x - 3) - (3x + 2)][(x - 3)^2 + (x - 3)(3x + 2) + (3x + 2)^2] \\ &= (x - 3 - 3x - 2)(x^2 - 6x + 9 + 3x^2 + 2x - 9x - 6 + 9x^2 + 12x + 4) \\ &= (-2x - 5)(13x^2 - x + 7) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(x - 3)^3 - (3x + 2)^3 = (-2x - 5)(13x^2 - x + 7)$



เราสามารถใช้อนุบัติการแจกแจงเขียนคำตอบของตัวอย่างที่ 7 เป็น $-(2x + 5)(13x^2 - x + 7)$ ก็ได้นะ

ในบางครั้งการแยกตัวประกอบของพหุนาม อาจต้องจัดพจน์ของพหุนามใหม่โดยใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ หรือสมบัติการแจกแจง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= (x^3 - 8) - (6x^2 - 12x) \\ &= (x^3 - 2^3) - 6x(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x - 2) \\ &= (x - 2)[(x^2 + 2x + 4) - 6x] \\ &= (x - 2)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x - 2)(x - 2)(x - 2) \\ &= (x - 2)^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$



ข้อสังเกต

$$\text{จากสูตร } A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการจดจำและนำไปใช้ อาจจำโดยย่อ ดังนี้

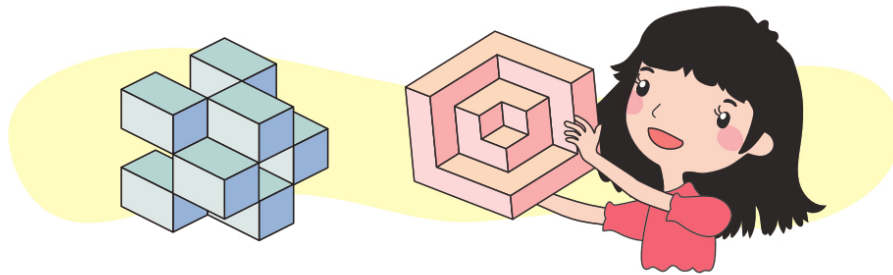
$$(\text{หน้า})^3 + (\text{หลัง})^3 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})[(\text{หน้า})^2 - (\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2]$$

$$(\text{หน้า})^3 - (\text{หลัง})^3 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})[(\text{หน้า})^2 + (\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2]$$



ชวนคิด 2.1

นักเรียนจะแยกตัวประกอบของ $x^3 + x + 2$ ได้อย่างไร



แบบฝึกหัด 2.1

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^3 + 27$
2. $y^3 + 64$
3. $8x^3 + 1$
4. $64z^3 + 125$
5. $27x^3 + 512y^3$
6. $729 + (x - 2)^3$
7. $(3x - 1)^3 + (x - 4)^3$
8. $(2x + 5)^3 + (5x - 9)^3$
9. $x^3 - 1$
10. $z^3 - 216$
11. $125y^3 - 64$
12. $1,000 - 216x^3$
13. $1,331y^3 - 343z^3$
14. $(4x + 3)^3 - 125$
15. $8 - (8x - 1)^3$
16. $(8x + 1)^3 + 8$
17. $(5x - 2)^3 + (5x + 2)^3$
18. $(2x + 5)^3 - (2x - 5)^3$
19. $(7x - 2)^3 - (6x + 9)^3$
20. $(8x - 15)^3 - (3x - 7)^3$
21. $x^3 - x^2 - x + 1$
22. $y^3 + y^2 - 4y - 64$

2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสาม

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสาม บางครั้งอาจทำได้โดยจัดพหุนามนั้นให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง กำลังสองสมบูรณ์ ผลบวกของกำลังสาม ผลต่างของกำลังสาม หรือนำแนวคิดในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปอื่น ๆ มาใช้ จากนั้นนักเรียนสามารถนำความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วมาใช้ในการแยกตัวประกอบต่อไปได้ ดังต่อไปนี้

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสามที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 1

จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 256$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^4 - 256 &= (x^2)^2 - 16^2 \\ &= (x^2 + 16)(x^2 - 16) \circ \circ \circ \\ &= (x^2 + 16)(x + 4)(x - 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 - 256 = (x^2 + 16)(x + 4)(x - 4)$

เนื่องจาก $x^2 - 16$ เป็นพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง จึงสามารถแยกตัวประกอบได้อีก

ตัวอย่างที่ 2

จงแยกตัวประกอบของ $16x^4 - 81$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - 9^2 \\ &= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) \circ \circ \circ \\ &= (4x^2 + 9)[(2x)^2 - 3^2] \\ &= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $16x^4 - 81 = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$

เนื่องจาก $4x^2 - 9$ เป็นพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง จึงสามารถแยกตัวประกอบได้อีก

ชาวบ้านจะ จากตัวอย่างที่ 2 ถ้าเราแทน $4x^2$ ด้วย A จะได้ไหมนะ

ได้สิชาวหอม ถ้าเราแทน $4x^2$ ด้วย A ก็จะได้

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= A^2 - 81 \\ &= A^2 - 9^2 \\ &= (A + 9)(A - 9) \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า A ด้วย $4x^2$ ก็จะได้

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) \\ &= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) \end{aligned}$$



การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสามที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 8x^2 + 16$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 + 16 &= (x^2)^2 - 2(x^2)(4) + 4^2 \\ &= (x^2 - 4)^2 \\ &= [(x + 2)(x - 2)]^2 \\ &= (x + 2)^2 (x - 2)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 - 8x^2 + 16 = (x + 2)^2 (x - 2)^2$

พหุนามนี้อยู่ในรูป $A^2 - 8A + 16$ ซึ่งแยกตัวประกอบได้เป็น $(A - 4)^2$ เมื่อ A แทน x^2

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $49x^4 + 70x^2 + 25$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 49x^4 + 70x^2 + 25 &= (7x^2)^2 + 2(7x^2)(5) + 5^2 \\ &= (7x^2 + 5)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $49x^4 + 70x^2 + 25 = (7x^2 + 5)^2$

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสามที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม หรือผลต่างของกำลังสาม

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $x^6 + 27$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^6 + 27 &= (x^2)^3 + 3^3 \\ &= (x^2 + 3)[(x^2)^2 - (x^2)(3) + 3^2] \\ &= (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) \end{aligned}$$

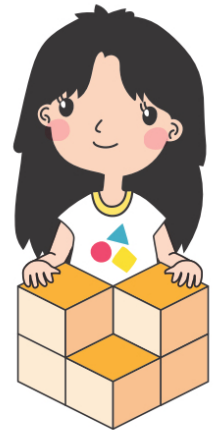
ดังนั้น $x^6 + 27 = (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $x^6 - 64$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^6 - 64 &= (x^3)^2 - 8^2 \\ &= (x^3 + 8)(x^3 - 8) \\ &= (x^3 + 2^3)(x^3 - 2^3) \\ &= [(x + 2)(x^2 - 2x + 4)][(x - 2)(x^2 + 2x + 4)] \\ &= (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^6 - 64 = (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$





ข้าวปั้นจ๊ะ จากตัวอย่างที่ 6
ถ้าเราแยกตัวประกอบโดยจัดพหุนาม
 $x^6 - 64$ ให้อยู่ในรูปผลต่างของ
กำลังสามก่อนจะทำได้ใหม่จะ

ได้ลิ้มข้าวหอม เราก็จะได้

$$\begin{aligned}x^6 - 64 &= (x^2)^3 - 4^3 \\ &= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x^4 + 4x^2 + 16)\end{aligned}$$



คำตอบที่ข้าวปั้นหามาได้ไม่เหมือนกับ
ตัวอย่างที่ 6 เลย



เรายังทำต่อได้อีกนะ แต่อาจยุ่งยากนิดหน่อย
โดยจะแยกตัวประกอบของ $x^4 + 4x^2 + 16$ ต่อได้อีก แบบนี้ไงล่ะ

$$\begin{aligned}x^4 + 4x^2 + 16 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 4x^2 \\ &= (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 \\ &= [(x^2)^2 + 2(4)(x^2) + 4^2] - 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \\ &= [(x^2 + 4) + 2x][(x^2 + 4) - 2x] \\ &= (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^6 - 64 = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$



ข้าวปั้นแกงจืด ปรบมือรัว ๆ ให้เลยจ้า



การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสามที่สามารถใช้แนวคิดจากการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 5x^2 - 36$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 - 36 &= (x^2 - 9)(x^2 + 4) \\ &= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 - 5x^2 - 36 = (x + 3)(x - 3)(x^2 + 4)$

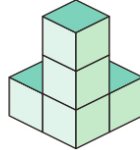
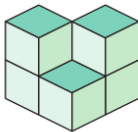
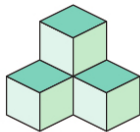
พหุนามนี้อยู่ในรูป $A^2 - 5A - 36$ เมื่อ A แทน x^2

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $70x^4 + 58x^2 + 12$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 70x^4 + 58x^2 + 12 &= 2(35x^4 + 29x^2 + 6) \\ &= 2(5x^2 + 2)(7x^2 + 3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $70x^4 + 58x^2 + 12 = 2(5x^2 + 2)(7x^2 + 3)$

พหุนาม $35x^4 + 29x^2 + 6$ อยู่ในรูป $35B^2 + 29B + 6$ เมื่อ B แทน x^2



ชวนคิด 2.2

นักเรียนจะแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้อย่างไร

- $x^{12} - 1$
- $y^4 + 2y^3 - y - 2$

แบบฝึกหัด 2.2

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

- $x^4 + 3x^2$
- $x^6 - 81x^4$
- $x^4 - 625$
- $160,000x^4 - 10,000$
- $25y^4 + 120y^2 + 144$
- $77x^4 - 72x^2 - 77$
- $x^4 - 29x^2 + 100$
- $x^6 + 216$
- $x^4 - y^4$
- $x^6 - y^6$
- $4x^4 - 16x^2$
- $x^6 + 2x^4 + x^2$
- $81y^4 - 625$
- $x^4 - 50x^2 + 625$
- $77x^4 + 170x^2 + 77$
- $x^4 - 10x^2 + 9$
- $64x^6 - 729$
- $512 - y^6$
- $a^6b^3 - 1$
- $216x^6 - 27y^6$



ตรวจสอบความเข้าใจ

รายการ	สบายมาก	ขอทบทวนอีกนิด
1. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม		
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสาม		
3. การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสามที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง กำลังสองสมบูรณ์ ผลบวกของกำลังสาม หรือผลต่างของกำลังสาม		



สรุปท้ายบท

- ❖ การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม
ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสามได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

- ❖ การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสาม
ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสามได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

- ❖ การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสาม อาจทำได้โดยจัดพหุนามนั้นให้อยู่ในรูป
 - ◆ ผลต่างของกำลังสอง
 - ◆ กำลังสองสมบูรณ์
 - ◆ ผลบวกของกำลังสาม
 - ◆ ผลต่างของกำลังสาม
 หรือนำแนวคิดในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปอื่น ๆ มาใช้



กิจกรรมท้ายบท : แยกรอยแผนที่ด้วยพหุนาม

ครูมินท์ได้สร้างชุดรหัส Plus Code ให้นักเรียนได้ค้นหาสถานที่ที่นักเรียนจะได้ไปทัศนศึกษา โดยนักเรียนจะต้องค้นหาตัวอักษรที่หายไปของชุดรหัส Plus Code จากการแยกตัวประกอบของพหุนามที่ครูกำหนดให้ และเรียงลำดับของตัวประกอบเพื่อสร้างชุดรหัส Plus Code โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. เมื่อนักเรียนแยกตัวประกอบของพหุนามได้แล้ว ให้นักเรียนเรียงลำดับของตัวประกอบที่มีดีกรีต่ำไปหาตัวประกอบที่มีดีกรีสูง ในกรณีที่ตัวประกอบมีดีกรีเท่ากัน ให้นักเรียนหาค่าของตัวประกอบ โดยการแทนค่า x ในตัวประกอบด้วยจำนวนใดจำนวนหนึ่ง เช่น แทนค่า x ด้วย 5 แล้วเรียงลำดับของตัวประกอบตามค่าของตัวประกอบที่ได้นั้น จากนั้นน้อยไปหามาก

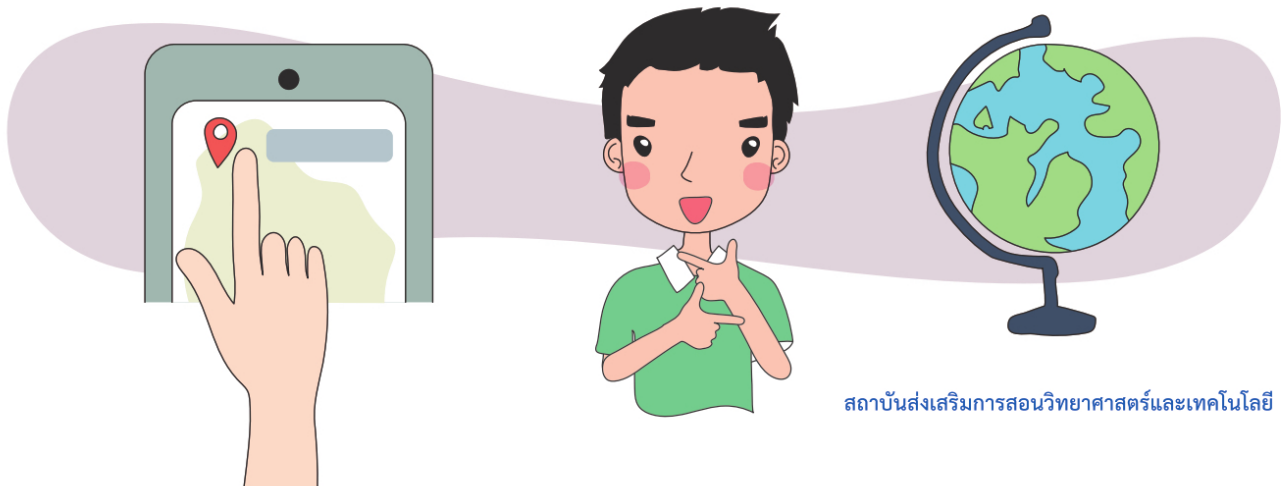
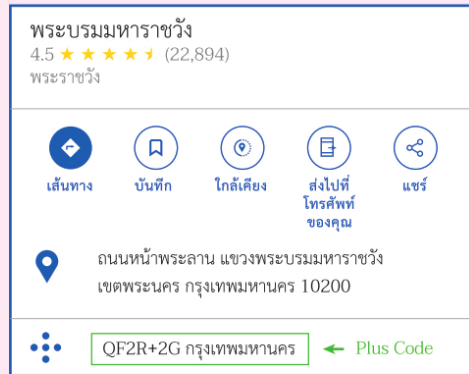
2. จากนั้นแทนตัวประกอบแต่ละตัวด้วยตัวอักษรในตารางรหัสแผนที่ แล้วนำรหัสที่สมบูรณ์ไปค้นหาใน Google Maps ที่ <https://www.google.co.th/maps> เพื่อค้นหาว่าชุดรหัส Plus Code นี้แสดงตำแหน่งของสถานที่ใด



เกร็ดน่ารู้

Plus Code เป็นชุดรหัสสำหรับระบุตำแหน่งของสถานที่ ซึ่งประกอบด้วยตัวอักษรและตัวเลข ความยาวไม่เกิน 11 หลัก คำนวณมาจากละติจูดและลองจิจูดของสถานที่ดังกล่าว Plus Code อาจมีชื่อเมืองหรือประเทศหรือไม่ก็ได้

Google Maps รองรับการใช้งาน Plus Code โดยหากเราใส่ Plus Code ลงในช่องค้นหาของ Google Maps ก็จะทำให้ทราบได้ว่า Plus Code นั้นแสดงถึงสถานที่ใด



พหุนาม $16x^4 - 2,401$ $343x^3 + 8$

ตัวประกอบ $(\dots)(\dots)(\dots)$ $(\dots)(\dots)$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Plus Code _____ 9 _____ + _____, Bangkok

ตารางรหัสแผนที่

A = $(x - 4)$	J = $(2x + 7)$	S = $(7x^2 + 2)$
B = $(4x + 49)$	K = $(7x - 2)$	T = $(7x^2 + 7)$
C = $(4x^2 + 49)$	L = $(16x^2 - 7)$	U = $(7x^2 - 7)$
D = $(x - 49)$	M = $(16x^2 + 7)$	V = $(7x + 2)$
E = $(x + 49)$	N = $(7x^2 - 14x + 4)$	W = $(2x - 7)$
F = $(x^2 + 49)$	O = $(7x^2 + 14x + 4)$	X = $(7x^2 - 14x - 4)$
G = $(2x - 49)$	P = $(49x^2 - 14x + 4)$	Y = $(49x^2 + 14x + 4)$
H = $(2x^2 + 7)$	Q = $(49x^2 - 14x - 4)$	Z = $(49x^2 + 14x - 4)$
I = $(2x^2 - 7)$	R = $(7x^2 + 14x - 4)$	

สถานที่ที่นักเรียนจะได้ไป
ทัศนศึกษา คือ





แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $8 - x^3$

2) $27x^3 + 125$

3) $(x - 3)^3 + 27$

4) $1,000 - (x + 10)^3$

5) $(x - 11)^3 - (x + 11)^3$

6) $(x - 5)^3 - (7x + 4)^3$

7) $81x^4 - 2,401$

8) $x^4 - 17x^2 + 16$

9) $x^4 - 32x^2 + 256$

10) $10x^4 - x^2 - 3$

11) $36x^4 - 97x^2 + 36$

12) $y^6 - 4,096$

13) $1 - a^6$

14) $1,000,000z^6 - 1$


15) $x^6 + 6x^4 + 9x^2$


16) $25x^6 + 10x^3 + 1$


 17) $81x^4 - 256y^4$

 18) $64 - x^3y^3$

 19) $343x^6 + 1,000z^6$

 20) $x^6 - 4x^3y + 4y^2$

 2. ถังน้ำทรงลูกบาศก์ A มีความยาวภายในด้านละ $x + 4$ นิ้ว และถังน้ำทรงลูกบาศก์ B มีความยาวภายในด้านละ $x - 2$ นิ้ว ถังน้ำทั้งสองมีน้ำบรรจุอยู่เต็ม อยากทราบว่า จะต้องใช้ถังน้ำ C ซึ่งมีความจุ $x^2 + 2x + 28$ ลูกบาศก์นิ้ว ก็ใบ จึงจะใส่น้ำทั้งหมดจากถังน้ำ A และถังน้ำ B ได้พอดี (เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าสอง)

 3. A, B และ C เป็นจำนวนเต็มบวกที่ B มากกว่า A และ C มากกว่า B อยู่เท่า ๆ กัน ถ้าผลคูณของทั้งสามจำนวนเป็น $x^3 + 12x^2 + 32x$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวก อยากทราบว่า

1) B มากกว่า A อยู่เท่าใด

2) ถ้าให้จำนวนที่น้อยที่สุดในสามจำนวนนี้ เท่ากับจำนวนเฉพาะสองหลักที่น้อยที่สุด ผลคูณและผลบวกของ A, B และ C จะเป็นเท่าไร